

समय : 3 घण्टे

- निर्देश :-
- (1) सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य हैं।
 - (2) प्रश्नों के अंक उनके समक्ष दर्शाए गए हैं।
 - (3) प्रश्न क्रमांक 1 से 3 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं।

(1x15=15)

प्रश्न 1) सही विकल्प चुनिए-

- i) माना $f: R \rightarrow R$ पर इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x)=3x-4$ तब $f^{-1}(x) =$
a) $\frac{x}{3}-4$ b) $\frac{x+4}{3}$ c) $3x+4$ d) $4x+3$
- ii) माना समुच्चय में $R=\{(a,b): a=b-2, b>6\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध है तब निम्न में से सही उत्तर होगा-
a) $(2,4) \in R$ b) $(3,8) \in R$ c) $(6,8) \in R$ d) $(8,7) \in R$
- iii) यदि फलन f किसी समुच्चय A से A पर परिभाषित है तब f व्युत्क्रमणीय फलन होगा जब फलन अनिवार्यतः होगा-
a) एकैकी b) आच्छादक c) एकैकी एवं आच्छादक d) इनमें से कोई नहीं
- iv) माना R रेखाओं के समुच्चय L पर संबंध $L_1 R L_2$ द्वारा परिभाषित है, यदि L_1 रेखा L_2 पर लंबवत हो, तब R किस प्रकार का संबंध होगा:
a) स्वतुल्य एवं सममित b) सममित एवं संक्रामक
c) तुल्यता संबंध d) सममित संबंध
- v) 3×3 कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल कितनी संख्या होगी जिसकी प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 हो-
a) 27 b) 18 c) 81 d) 512
- vi) माना $f: R \rightarrow R$ और $g: R \rightarrow R$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x)=2x^2+3x+5$ और $g(x)=4x-5$ तब $f \circ g(0)$ का मान होगा
a) 20 b) 25 c) 40 d) 10
- vii) यदि $A=\{1,2,3\}$ हो तो अवयव $\{1,2\}$ वाले तुल्यता सम्बंधों की संख्या होगी-
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4
- viii) माना एक 5×7 कोटि का आव्यूह है तो प्रत्येक स्तम्भ में अवयवों की संख्या होगी-
a) 7 b) 5 c) 35 d) इनमें से कोई नहीं
- ix) यदि $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 + 1$ जहाँ $x \in R$ द्वारा परिभाषित है तो $f^{-1}(5)$ का मान है
a) 28 b) 4 c) 2 d) अस्तित्व नहीं है।
- x) माना * एक द्विआधारी संक्रिया इस प्रकार परिभाषित है कि $a * b = 7a + 9b$ तब $3 * 4$ का मान होगा-
a) 21 b) 36 c) 55 d) 57
- xi) यदि $\sin^{-1}x = y$ तब
a) $0 \leq y \leq \pi$ b) $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ c) $0 < y < \pi$ d) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

- xii) $\sin(\cot^{-1}x)$, $|x| < 1$ बराबर होगा -
a) $\sqrt{1+x^2}$ b) 1 c) x d) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- xiii) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ का मान है-
a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{-3\pi}{4}$
- xiv) मान लीजिए X की कोटि $2 \times n$ तथा Z की कोटि $2 \times p$ है यदि $n = p$ हो तो आव्यूह $7X - 5Z$ की कोटि है-
a) $p \times 2$ b) $2 \times n$ c) $n \times 3$ d) $p \times n$
- xv) यदि A एक वर्ग आव्यूह है तो सममित आव्यूह होगा-
a) $A^2 = A$ b) $A^2 = I$ c) $A' = A$ d) $A' = -A$

प्रश्न 2) रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए- (1x5=5)

- i) यदि $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{6}$ हो तो x का मान होगा ।
ii) $\tan^{-1}3 + \tan^{-1}x = \tan^{-1}8$ हो तो x का मान होगा ।
iii) $\sin\left|\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right|$ का मान होगा ।
iv) यदि $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ का मान होगा ।
v) यदि $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$ तब x का मान होगा ।

प्रश्न 3) एक शब्द / वाक्य में उत्तर लिखिए- (1x10=10)

- i) यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ तब x का मान लिखिए।
ii) यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई है तथा इसके शीर्ष (2, -6), (5, 4) तथा (k, 4) है तब k का मान लिखिए।
iii) सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ में अवयव 6 का उपसारणिक लिखिए।
iv) यदि A और B दो व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तब $(AB)^{-1}$ का मान लिखिए।
v) $\begin{vmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{vmatrix}$ का मान लिखिए।
vi) यदि A कोई 3×3 कोटि का आव्यूह है तब सारणिक के उपसारणिकों की संख्या लिखिए।
vii) सारणिक $\begin{vmatrix} p & p+1 \\ p-1 & p \end{vmatrix}$ का मान लिखिए।
viii) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ का मान लिखिए।
ix) यदि A, 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो $|KA|$ का मान लिखिए।
x) यदि $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{2\pi}{3}$ तो $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y$ का मान लिखिए।

4) दिए गए 6 प्रश्नों में से कोई 4 प्रश्न हल कीजिए- (प्रत्येक प्रश्न पर आवंटित अंक 3 है।)

i) गुणनफल परिकलित कीजिए:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

- ii) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध स्वतुल्य है, परंतु न तो सममित है और न संक्रामक है।
- iii) मान लीजिए कि XY -तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय L है और L में $R = \{(L_1, L_2) : L_1 \text{ समान्तर है } L_2 \text{ के}\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है।
- iv) मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ A से B तक एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है।
- v) बतलाइए कि क्या दिया हुआ फलन एकैकी, आच्छादक अथवा एकैकी आच्छादी (bijective) है। अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।
 $f(x) = 1 + x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ है।
- vi) तीन फलन $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ तथा $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ पर विचार कीजिए जहाँ
 $f(x) = 2x$, $g(y) = 3y + 4$ तथा $h(z) = \sin z$, $\forall x, y$ तथा $z \in \mathbb{N}$. सिद्ध कीजिए कि
 $ho(gof) = (hog)$ of.

5) दिए गए 5 प्रश्नों में से कोई 3 प्रश्न हल कीजिए— (प्रत्येक प्रश्न पर आवंटित अंक 3 है।)

i) यदि $f(x) = \frac{(4x+3)}{(6x-4)}$, $x \neq \frac{2}{3}$, तो सिद्ध कीजिए कि सभी $x \neq \frac{2}{3}$ के लिए $f \circ f(x) = x$ है।

f का प्रतिलोम फलन क्या है ?

ii) मान लीजिए कि $f: \{1, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 5\}$ तथा $g: \{1, 2, 5\} \rightarrow \{1, 3\}$, $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ तथा $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$ द्वारा प्रदत्त हैं। $g \circ f$ ज्ञात कीजिए।

iii) $g \circ f$ तथा $f \circ g$ ज्ञात कीजिए, यदि $f(x) = 8x^3$ तथा $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

iv) मान लीजिए कि \mathbb{N} में एक द्विआधारी संक्रिया $*$, $a * b = a$ तथा b द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित ज्ञात कीजिए: (i) $5 * 7$, (ii) $20 * 16$

v) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

6) दिए गए 5 प्रश्नों में से कोई 3 प्रश्न हल कीजिए— (प्रत्येक प्रश्न पर आवंटित अंक 3 है।)

i) सिद्ध कीजिए कि $3 \sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

ii) सिद्ध कीजिए कि $2 \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \tan^{-1} \frac{31}{17}$

iii) फलन $\tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, $0 < x < \pi$ को सरलतम रूप में लिखिए:

iv) सरलतम रूप में लिखिए:

$$\tan^{-1} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right), \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

v) $\tan^{-1}[2 \cos(2 \sin^{-1} \frac{1}{2})]$ का मान ज्ञात कीजिए।

7) दिए गए 6 प्रश्नों में से कोई 4 प्रश्न हल कीजिए— (प्रत्येक प्रश्न पर आवंटित अंक 4 है।)

i) एक 2×2 आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए जिसका अवयव $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{7}$ है।

ii) निम्न समीकरण x, y और z का मान ज्ञात कीजिए-

$$\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & n \end{bmatrix}$$

iii) सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R, न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

iv) आव्यूह $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ को सममित एवं असममित आव्यूहों के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

v) प्रदत्त समीकरण को x, y, z तथा t के लिए हल कीजिए यदि

$$2 \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

vi) सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए:

$$\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$$

8) दिए गए 5 प्रश्नों में से कोई 3 प्रश्न हल कीजिए— (प्रत्येक प्रश्न पर आवंटित अंक 4 है।)

i) दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखंडों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ है।

iii) समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

$$4x - 3y = 3$$

$$3x - 5y = 7$$

iv) 4 kg प्याज, 3 kg गेहूँ और 2 kg चावल का मूल्य Rs 60 है। 2 kg प्याज, 4 kg गेहूँ और 6 kg चावल का मूल्य Rs 90 है। 6 kg प्याज, 2 kg और 3 kg चावल का मूल्य Rs 70 है। आव्यूह विधि द्वारा प्रत्येक का मूल्य प्रति kg ज्ञात कीजिए।

v) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ है तो $A^2 - 5A + 6I$, का मान ज्ञात कीजिए।

9) दिए गए 5 प्रश्नों में से कोई 3 प्रश्न हल कीजिए— (प्रत्येक प्रश्न पर आवंटित अंक 4 है।)

i) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ और $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है एवं $A^2 = kA - 2I$ हो तो k ज्ञात कीजिए।

ii) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

iii) प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

iv) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो दिखाइए $|3A| = 27|A|$

v) सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए—

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2 b^2 c^2$$