

**अर्द्धवार्षिक परीक्षा 2021-22****कक्षा - द्वादश****विषय : गणित**

निर्धारित समय : 3:15 घण्टे

पूर्णांक : 100

**साधारण्य निर्देश :**

- 1 प्रत्येक प्रश्नो के उत्तर खण्डो के क्रमानुसार ही कीजिए।
- 2 कृपया जाच ले प्रश्न पत्र में प्रश्नों की कुल संख्या 09 तथा मुद्रित पृष्ठों की संख्या 07 है।
- 3 कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखिए।
- 4 घण्टी का प्रथम संकेत प्रश्न पत्रों के वितरण एवं प्रश्न पत्र को पढने के लिए है।
- 5 15 मिनट के पश्चात घण्टी के द्वितीय संकेत पर प्रश्न पत्र हल करना प्रारम्भ कीजिए।

प्र 1 सभी खण्ड हल कीजिए-

क यदि  $f(x) = 1+x^2$  तो  $f(x)$  है (1)

1. बहुएक अन्तःक्षेपी
2. एकैकी अच्छादक
3. एकैकी अन्तःक्षेपी
4. इनमें से कोई नहीं

ख.  $\log \tan x$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन कीजिए। (1)

- (i)  $2 \sec 2x$
- (ii)  $2 \operatorname{Cosec} 2x$
- (iii)  $2 \sec^2 x$
- (iv)  $2 \operatorname{Cosec}^2 x$

ग यदि A एक आव्यूह  $2 \times 3$  कोटि का है तथा B कोई आव्यूह  $3 \times 2$  कोटिका है तो उनके गुणनफल AB की कोटि होगी।

1.  $2 \times 2$  ✓
2.  $3 \times 3$
3.  $3 \times 2$
4. इनमें से कोई नहीं

घ  $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$  का मान है

- (i)  $-2 \cos \sqrt{x} + c$  ✓
- (ii)  $2 \cos \sqrt{x} + c$
- (iii)  $2 \sqrt{2} \cos x + c$
- (iv)  $\sqrt{2} \cos \sqrt{x} + c$

उ यदि कोई सम्बन्ध  $R$  इस प्रकार परिभाषित है कि  $f: R \rightarrow R$  तथा

$f(x) = e^x$  तो  $f$  है

- 1 एकैकी ✓                      2 अन्तक्षेपी  
3 अन्तक्षेपी आच्छादक        4 इनमें कोई नहीं

1 Attempt all parts

(a) If  $f(x) = 1 + x^2$  then  $f(x)$  is

- (i) Many one into                      (ii) One-One on to  
(iii) One one into                      (iv) None of these

(b) Differential coefficient of  $\log(\tan x)$  is

- (i)  $2 \sec 2x$                               (ii)  $2 \operatorname{cosec} 2x$   
(iii)  $2 \sec^2 x$                               (iv)  $2 \operatorname{cosec}^2 x$

(c) If  $A$  is the Matrix of order  $2 \times 3$  and  $B$  is the matrix of order  $3 \times 3$  the order of their multiplication  $AB$  is:

- (i)  $2 \times 2$     (ii)  $3 \times 3$     (iii)  $3 \times 2$     (iv) None of these

(d)  $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$  is

- (i)  $-2 \cos \sqrt{x} + c$                       (ii)  $2 \cos \sqrt{x} + c$   
(iii)  $2 \sqrt{2} \cos x + c$                       (iv)  $\sqrt{2} \cos \sqrt{x} + c$

(e) If  $R$  is a relation such that  $f: R \rightarrow R$  and defined as  $f(x) = e^x$  then  $f$  is:

- (i) one one    (ii) on to    (iii) Onto-into    (iv) None of these

2 सभी खण्ड कीजिए-

क  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$  का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

ख  $e^{\log \tan x}$  का  $x$  के सापेक्ष अवकल गुणक ज्ञात कीजिए।

ग  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

घ आव्यूह  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  का परिवर्त आव्यूह ज्ञात कीजिए।

उ यदि फलन  $f(x) = \begin{cases} 2ax & x > 3 \\ 3x + 1 & x < 3 \end{cases}$   $x = 3$  पर सतत है तो  $Q$  का मान ज्ञात कीजिए।

Attempt all parts

(a) Find principal value of  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

(b)  $e^{\cos \tan x}$  diff w.r.t.  $x$

(c) Find transpose of the Matrix  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(d) If function  $f(x) = \begin{cases} 2ax & x > 3 \\ 3x + 1 & x < 3 \end{cases}$  is continuous at

$x=3$  then find the value of 'a'

(e) यदि फलन  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$  पर सतत है तो Q का मान ज्ञात कीजिए।

प 3 सभी स्पष्ट हल कीजिए।

क यदि  $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \dots}}} \approx \frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए। (2)

ख यदि  $\begin{bmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$  तो a, b, c का मान ज्ञात कीजिए।  $3, 5, 0$  (2)

ग यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$  तो AB का मान ज्ञात कीजिए। (2)

घ  $\cos^{-1}\left(\cos \frac{3\pi}{4}\right)$  का मान ज्ञात कीजिए। (2)

3 Attempt all parts.

(a) If  $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \dots}}}$  Find  $\frac{dy}{dx}$  (2)

(b) If  $\begin{bmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$  find value of a, b, c. (2)

(c) If  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$  find AB (2)

(d) Evaluate  $\cos^{-1}\left(\cos \frac{3\pi}{4}\right)$  (2)

4. सभी खण्ड कीजिए-

क. यदि  $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$  तो दिखाइये

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

5.

ख. एक परवर्ती घन की कोर 3 से.मी. / सेकण्ड की दर से बढ़ रही है तो घन का आयतन किस दर से बढ़ेगा यदि किनारा 10 से.मी. हो। 300 (2)

ग. वक्र  $2x^3 + 3x^2 - 4$  के बिन्दु (1, 1) पर स्पर्शी का समीकरण ज्ञात कीजिए। (2)

घ. सिद्ध कीजिए फलन  $f(x) = \log(\cos x)$  अन्तराल  $]0, \pi[$  में निरन्तर हासमान है। (2)

4. Attempt all parts :

(a) If  $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$  prove that

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

6

(b) A variable cube's side is increasing 3 cm./sec. Find rate of increase of volume if its side is 10 cm. (2)

(c) Find tangent of the curve  $2x^3 + 3x^2 - 4$  at point (1, 1) (2)

(d) Prove that function  $f(x) = \log \cos x$  is continuously increasing in  $]0, \pi[$  interval. (2)

5. कोई पांच खण्ड हल कीजिए।

क. यदि किसी त्रिभुज के शीर्ष A(x, y), B(1, 2) C(2, 1) हो और उसका क्षेत्रफल 6 वर्ग इकाई हो तो दर्शाओ कि  $x + y = 15$  (5)

ख. सिद्ध कीजिए- 
$$\begin{bmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{bmatrix} \begin{matrix} x - y \\ = 0 \end{matrix} \quad (5) = 15$$

ग. यदि  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{जब } x \geq 1 \\ x & \text{जब } x < 1 \end{cases}$  तो सिद्ध करो  $f(x)$  बिन्दु पर  $x = 1$  पर अवकलनीय नहीं है। (5)

घ. यदि  $y = \sin^{-1} [x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x^2}]$  तो  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए। (5)

- ड. वक्र  $x=t^2$ ,  $y=2t+1$  के बिन्दु '1' पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए। (5)
- च. सिद्ध कीजिए  $x^x$  का मान  $x = \frac{1}{e}$  पर निम्नष्ट है। (5)

5. Attempt any five parts :

- (a) If A(x, y), B(1, 2) and C(2, 1) are the vertices of triangle ABC of area 6 square units. Prove that  $x+y=15$ . (5)
- (b) Prove that: 
$$\begin{bmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{bmatrix} = 0$$
 (5)
- (c) If  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{at } x \geq 1 \\ x & \text{at } x < 1 \end{cases}$  prove that  $f(x)$  is not differentiable at  $x=1$ . (5)
- (d) If  $y = \sin^{-1} [x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x^2}]$  Find  $\frac{dy}{dx}$  (5)
- (e) Find the equation of normal to the curve  $x=t^2$  and  $y=2t+1$  at the point t if  $t=1$ . (5)
- (f) Prove that the value of  $x^x$  at  $x = \frac{1}{e}$  minimum. (5)

6. किन्हीं पांच खण्डों को हल कीजिए—

- क. आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$  का सहखण्ड G आव्यूह ज्ञात कीजिए। (5)
- ख. यदि  $y = e^{-x} \cos x$  तो सिद्ध कीजिए  $\frac{d^2y}{dx^2} + 2y + \cos x = 0$  (5)
- ग.  $\frac{3x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{3(x^2 + 1)} dx$  का मान ज्ञात कीजिए। (5)
- घ.  $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$  को हल कीजिए। (5)
- ड.  $\sin^{-1} \left[ \sin^2 \frac{2\pi}{3} \right]$  का मान ज्ञात कीजिए और  $\operatorname{Cosec}^{-1}(-1)$  का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। (5)
- च. यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  तो

सिद्ध कीजिए  $A(B+C) = AB+AC$  (5)

6. Attempt five parts only :

(a) Find the adj of Matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$  (5)

(b) If  $y = e^{-x} \cos x$  prove that  $\frac{dy}{dx} - 2y \tan x = 0$  (5)

(c) Evaluate:  $\int \frac{3x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{3(x^2 + 1)} dx$  (5)

(d) Evaluate:  $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$  (5)

(e) Find the value of  $\sin^{-1} \left[ \sin^2 \frac{2\pi}{3} \right]$  and also find principal value of  $\operatorname{Cosec}^{-1}(-1)$ . (5)

(f) If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$   $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$   
 prove that  $A(B+C) = AB + AC$  (5)

7. किसी एक खण्ड को हल कीजिए—

क. सिद्ध कीजिए  $\begin{vmatrix} (a-x)^2 & (a-y)^2 & (a-z)^2 \\ (b-x)^2 & (b-y)^2 & (b-z)^2 \\ (c-x)^2 & (c-y)^2 & (c-z)^2 \end{vmatrix}$  (8)  
 $= 2(a-b)(b-c)(c-a)(x-y)(y-z)(z-x)$

ख. समीकरण  $x - 2y + 3z = 11$  (8)  
 $3x + u - z = 2$   
 $5x + 3y + 2z = 3$  को आव्यूह विधि से हल कीजिए। (8)

7. Attempt any one part :

(a) Prove that  $\begin{vmatrix} (a-x)^2 & (a-y)^2 & (a-z)^2 \\ (b-x)^2 & (b-y)^2 & (b-z)^2 \\ (c-x)^2 & (c-y)^2 & (c-z)^2 \end{vmatrix}$  (8)  
 Determinant  $= 2(a-b)(b-c)(c-a)(x-y)(y-z)(z-x)$

(b) Solve by matrix method  
 Equations  $x - 2y + 3z = 11$   
 $3x + u - z = 2$   
 $5x + 3y + 2z = 3$

8. किसी एक खण्ड को हल कीजिए—

क. यदि  $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$  तो सिद्ध कीजिये  $\frac{dy}{dx} = (1+x)^{-2}$  (8)

ख.  $\int \frac{\cos x}{(\cos x/2 + \sin x/2)^3} dx$  का मान ज्ञात कीजिए। (8)

8. Attempt any one part:

(a) If  $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$  prove that  $\frac{dy}{dx} = (1+x)^{-2}$  (8)

(b) Evaluate  $\int \frac{\cos x}{(\cos x/2 + \sin x/2)^3} dx$

9. किसी एक खण्ड का हल कीजिए—

क. यदि वक्र  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ , का अभिलम्ब  $x$  अक्ष से  $\phi$  कोण बनाता है तो सिद्ध कीजिए— ✓

$$y \cos \phi - x \sin \phi = a \cos 2\phi \quad (8)$$

ख. यदि  $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$   $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

तब  $(I-A)^{-1}$  ज्ञात कीजिए। (8)

9. Attempt any one part:

(a) If curve  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ , makes an angle  $\phi$  with  $x$  axis to its normal prove that

$$y \cos \phi - x \sin \phi = a \cos 2\phi \quad (8)$$

(b) if  $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$   $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (8)

Find  $(I-A)^{-1}$